数理解析研究所講究録
478巻 1983年 79-92

非線型固有値問題（森嶋の定理の拡張）

京大 理学部 押目頼昌
Yorimasa Oshime

序 論

本稿では、非線型固有値問題を扱う。すなわち適当な条件を満たす連続写像 $\varphi ; R_+^n \to R_+^n$ （但し $R_+ = [0, \infty)$ である）について

$$\varphi(x) = \lambda x$$

を満たす $\lambda \geq 0$ と $x \in R_+^n$ について考える。特に我々の興味の中心は、すべての成分が正であるような $x \in R_+^n$ の存在にある。本稿での枠組でこの問題を扱い、*indecomposable* という性質を持つ写像 $\varphi ; R_+^n \to R_+^n$ を中心として理論を作り上げたのは、森嶋，二階堂両先生であった。そしてその理論は *Leontief* モデルの一般化に際し要請されたのであった。ところが、*indecomposable* な写像よりも広いクラスがあり、*indecomposable* な写像の本質的な性質はすべて満たすのであ

る。これを non-sectional な写像と呼び、本稿では、その解説をする。なお証明はすべて省くが、興味ある方は、Oshime [3], [4] を参照されたい。

経済モデルと固有値問題

一つの社会の経済活動が、n 個の産業部門に分かれ、一つ一つの部門はただ一つの製品を生産するものとする。これらの部門別の生産高やそれらへの投入量は順に並べて行ベクトルで表示する。生産高 $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を無駄なく達成するのに必要な投入量 $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ は x の関数とみなせるので $y=F(x)$ と書く。さて t 年度の生産高 $x(t)$ は、$(t+1)$ 年度への投入量 $y(t+1)=F(x(t+1))$ と $(t+1)$ 年度での消費 $c(t+1)$ に使われるので次式が成立することになる。

(1) …・ $F(x(t+1))+c(t+1)=x(t)$

有名な Leontief モデルは、$F(x)=x\cdot A$ （A：非負行列）としたものであり、森嶋－二階堂のモデルは F を非減少で斉次一次な連続関数としたものである。（森嶋 [1], 二階堂 [2] 参照）。

ところで経済発展のなかで最も興味深いものは、各部門別の生産高がその割合を変えずに増大する場合、つまり balanced growth である。この時 $\{x(t)\}$ $(t=0,1,\ldots)$ はどんな式を満たすだろうか。増大率を $[\lambda(t+1)]^{-1}$ とすると $x(t+1)=[\lambda(t+1)]^{-1}x(t)$ だから (1) より

$$F(x(t+1))+c(t+1)=\lambda(t+1)x(t+1) \quad t=0,1,\ldots$$

すなわち

$$[\lambda(t+1)-F](x(t+1))=c(t+1) \quad t=0,1,\ldots$$

となって、$x(t+1)$ はレゾルベント問題の解である。特に消費 $c(t)$ を無視できる場合は

$$F(x(t+1))=\lambda(t+1)x(t+1)$$

となって、正に固有値問題となる。

定義と記号

本稿では、ベクトル間の不等号を次の意味で使う。

$$x \leqq y \iff x_i \leqq y_i \quad \forall i=1,2,\ldots,n$$

$$x < y \iff x_i < y_i \quad \forall i=1,2,\ldots,n$$

$$x \leq y \iff x \leqq y \text{ かつ } x \neq y$$

<u>定義 1</u>　　$H(x)$ が非減少斉次一次変換（略して斉次変換）であるとは、次の 3 条件を同時に満たすことである。

1)　$H(x)$ は R_+^n からその中への連続写像である。

2)　$x \leqq y$ なる任意の $x, y \in R_+^n$ に対し、$H(x) \leqq H(y)$

3)　任意の $x \in R_+^n$ と任意のスカラー $\rho \geqq 0$ に対し、$H(\rho x) = \rho H(x)$。特に $H(0) = 0$

次に non-sectional な斉次変換，そして対照のために、indecomposable な斉次変換を定義しよう。

<u>定義 2</u>　　斉次変換 $H(x)$ が indecomposable であるとは、任意の添字の分割 $\Theta \cup \Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して次の条件を満たす $\bar{\omega} \in \Omega$ が常に存在することである。

1)　$x, y \in R_+^n$ が $x_\theta < y_\theta \ (\forall \theta \in \Theta)$, $0 \leqq x_\omega = y_\omega \ (\forall \omega \in \Omega)$ を満たせば、$H_{\bar{\omega}}(x) < H_{\bar{\omega}}(y)$.

Indecomposable な斉次変換の例

$$H_1(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1^2 + x_2^2}$$

$$H_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 3x_2^2}$$

この斉次変換の非負固有ベクトルは唯一つで、$H(1, 1) = 2(1, 1)$.

<u>定義3</u>　斉次変換 $H(x)$ が non-sectional であるとは、任意の添字の分割 $\Theta \cup \Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して次の2条件を同時に満たす $\varpi \in \Omega$ が常に存在することである。

1) $x, y \in R_+^n$ が $x_\theta < y_\theta \ (\forall \theta \in \Theta)$, $0 < x_\omega = y_\omega \ (\forall \omega \in \Omega)$ を満たせば、$H_\varpi(x) < H_\varpi(y)$.

2) $x_\omega > 0 \ (\forall \omega \in \Omega)$ を固定し、$x_\theta \ (\forall \theta \in \Theta) \to \infty$ とした時、$H_\varpi(x) \to \infty$.

<u>注意</u>　定義2の1)では、$0 \leqq x_\omega = y_\omega$ であるが、定義3の1)では $0 < x_\omega = y_\omega$ である。この一見ささいな差異は、次例からわかるように非常に大きな違いである。そして indecomposable な斉次変換が常に non-sectional になるということも一般的に証明できる。(Oshime [4] 参照)

Non-sectional で indecomposable でない斉次変換の例

$$H_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1(x_1 + 3x_2)}$$

$$H_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2(3x_1 + x_2)}$$

この斉次変換の非負固有ベクトルは三つあって、$H(1,1)=2(1,1)$
$H(1,0) = (1,0)$, $H(0,1) = (0,1)$

諸　定　理

まず斉次変換すべてに共通する次の性質を述べておこう。

定理 1 （Morishima [1] 参照）　斉次変換は、非負固有ベクトルに対応する固有値（当然非負）を1つ以上持ち、かつ高々有限個（2^n-1 以下）しか持たない。

この定理により、最大固有値という言葉が意味を持つのがわかる。さて前節で、indecomposable な斉次変換と non-sectional な斉次変換の例を1つずつ与えた。それらの例から予想されるように、正の固有ベクトルの存在について次の二定理が成り立つ。

定理 2 （Morishima [1] 参照）　Indecomposable な斉次変換は非負固有ベクトルを唯一つ（スカラー倍を無視して）持ち、それは正のベクトルである。またその対応する固有値も正である。

定理 3 （Oshime [4] 参照）　Non-sectional な斉次変換は正の固有ベクトルを唯一つ（スカラー倍を無視して）持

ら、最大固有値(必然的に正となる)に対応する。

注意1　前節の例からも察せられるように、非負の固有ベクトルを問題とすれば、*non-sectional* な斉次変換の固有ベクトルは複数個あり得る。しかし理論を組み立てる時必要なのは正の固有ベクトルの存在と一意性だから、このことは些細なことと言える。

注意2　*Non-sectional* な斉次変換についての定義3において 2) の条件は透明でない印象を受ける。しかしながらこれが必要であることは次の例よりわかる。

$$H_1(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2}(x_1 + x_2)$$

$$H_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\frac{x_2}{x_1}\right)\mathrm{Arctan}\frac{x_2}{x_1}$$

この時考えられる添字の分割は、$\Theta = \{1\}$, $\Omega = \{2\}$ あるいは $\Theta = \{2\}$, $\Omega = \{1\}$ の2通りだけである。$\frac{\partial H_1}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial H_2}{\partial x_1} > 0$ ($\forall (x_1, x_2) > 0$) が確かめられるので、$x_1 > 0$ を固定した時 $H_1(x_1, x_2)$ は x_2 について狭義増加関数、$x_2 > 0$ を固定した時 $H_2(x_1, x_2)$ は x_1 について狭義増加関数となって定義3の1) は満たされる。しかし、この $H(x)$ は正の固有ベクトルを持たない。もし正の固有ベクトル $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$ が存在したと仮定すれば、固有値を λ として

$$\lambda x_1 = H_1(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2}(x_1 + x_2) > \frac{\pi}{2} x_1$$

$$\lambda x_2 = H_2(x_1, x_2) < \lim_{x_1 \to \infty} H_2(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2} x_2$$

上の式より $\lambda > \frac{\pi}{2}$ ，下の式より $\lambda < \frac{\pi}{2}$ となり矛盾する。すなわちこの $H(x)$ は正の固有ベクトルを持てないのである。

今度はレゾルベント問題を考えよう。つまり $\lambda > 0$ と $c \geqq 0$ を与えて

$$\lambda x - H(x) = c$$

を満たす $x \geqq 0$ があるかないか，あればどんな性質を持つかについて考えよう。$H(x)$ がただの斉次変換あるいは *indecomposable* な斉次変換の場合には、二階堂・森嶋両先生により次の二定理が証明された。(*Nikaido* [2]，*Morishima* [1] 参照)。但しここでの記述は、*Oshime* [4] に依る。これから以後 $\lambda_0(H)$ は $H(x)$ の最大固有を表わすものとする。

<u>定理4</u>　1) レゾルベント方程式 $\lambda x - H(x) = c$ は $\lambda > \lambda_0(H)$ の時、すべての $c \geqq 0$ について可解である。特に $c > 0$ と $c = 0$ の時は解の一意性が成り立つ。$c \geqq 0$ が零成分を含む時の解を適当に択べば、レゾルベント方程式の解 $R_\lambda(c)$ は c について斉次変換となって次の性質を持つ。

1,1) $0 \leqq c \leq \bar{c}$ ならば $R_\lambda(c) \leq R_\lambda(\bar{c})$

1,2) $0 \leqq c < \bar{c}$ ならば $R_\lambda(c) < R_\lambda(\bar{c})$

2) 逆に $c > 0$ について $\lambda x - H(x) = c$ が正の解 $x > 0$ を持てば $\lambda > \lambda_0(H)$.

<u>定理5</u> $H(x)$ を *indecomposable* とする。

1) レゾルベント方程式 $\lambda x - H(x) = c$ は $\lambda > \lambda_0(H)$ の時、すべての $c \geqq 0$ について一意的に可解であり、その解 $R_\lambda(c)$ は c について *indecomposable* な斉次変換である。さらに強く次の事が言える。

1,1) $0 \leqq c \leq \bar{c}$ ならば $R_\lambda(c) < R_\lambda(\bar{c})$

2) 逆に $c \geq 0$ について $\lambda x - H(x) = c$ が非負の解 $x \geq 0$ を持てば $\lambda > \lambda_0(H)$.

ところが、定理5の *indecomposable* を *non-sectional* に置き変えても、ほぼ同一の結果が成り立つことがわかる。

<u>定理6</u> (*Oshime* [4] 参照) $H(x)$ を *non-sectional* とする。

1) レゾルベント方程式 $\lambda x - H(x) = c$ は $\lambda > \lambda_0(H)$ の時、すべての $c \geqq 0$ について可解であり、$c > 0$ と $c = 0$

については解は一意的である。零成分を持つ $c \geq 0$ については必ずしも一意的でないが、正の解に限れば一意的であり、このようにして定めた $R_\lambda(c)$ は c について *indecomposable* な斉次変換であって次のことを満たす。

1.1) $0 \leqq c \leq \tilde{c}$ ならば $R_\lambda(c) < R_\lambda(\tilde{c})$

2) 逆に $c \geq 0$ について $\lambda x - H(x) = c$ が <u>正</u>の解を持てば $\lambda > \lambda_0(H)$.

次に *sectional* な斉次変換の *non-sectional* な変換への分解（*expansion*）とその一二の応用について述べよう。

まず線型代数の結果を引用しよう。線型変換が非負行列 A で与えられ、A が *decomposable* としよう。線型空間の基底を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ とする。この時基底ベクトルの順序を適当に変えて $e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}$ とすれば、この新しい基底について線型変換 A は次のように表わせる。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & A_{\mu\mu} & & & \\ \hline & & & A_{\mu+1\,\mu+1} & & 0 \\ & * & & & \ddots & \\ & & & * & & A_{\nu\nu} \end{array}\right)$$

但し $A_{11},\ldots,A_{\mu\mu},A_{\mu+1\mu+1},\ldots,A_{\nu\nu}$ はすべて indecomposable である。証明は、例えば Gantmacher [5] を見よ。

これと同様のことが本稿の話題である斉次変換についても可能である。ただし sectional なら何でも良いわけでなくて、斉次変換の subclass を次のように設定してその中で考える。

定義 4　斉次変換が docile であるとは、次の2条件を同時に満たすことである。

1) $H(x)$ は $(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty)$ つまり R^n_+ の内点で real-analytic である。

2) 添字の分割 $\Theta\cup\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$ を一つ定める。

$x_\omega>0$ $(\forall\omega\in\Omega)$ を固定し、x_θ $(\forall\theta\in\Theta)\to\infty$ とした時、すべての $\omega\in\Omega$ につき $H_\omega(x)$ が有界であれば、$H_\omega(x)$ $(\forall\omega\in\Omega)$ は x_ω $(\omega\in\Omega)$ のみの関数である。

Docile な斉次変換の例

$$H_j(x_1,\ldots,x_n)=[x_1,\ldots,x_n \text{ の } m_j \text{ 次斉次非負係数多項式}]$$
$$\forall j=1,\ldots,n$$

定理 7　Docile な斉次変換には、次のような添字の分割

$J_1 \cup \cdots \cup J_\mu \cup J_{\mu+1} \cup \cdots \cup J_\nu = \{1, 2, \cdots, n\}$ があって

$$H_{J_k}(x) \equiv H_{J_k}(0, \cdots, 0, x_{J_k}, 0, \cdots, 0) \qquad k=1, \cdots, \mu$$

$$H_{J_k}(x) \equiv Z_{J_k}(x) + H_{J_k}(0, \cdots, 0, x_{J_k}, 0, \cdots, 0) \quad k=\mu+1, \cdots, \nu$$

を満たす。ここで $H_{J_k}(0, \cdots, 0, x_{J_k}, 0, \cdots, 0)$ は x_{J_k} の関数と見て *non-sectional* である。また $F_{J_k}(x)$ は、

$F_{J_k}(0, \cdots, 0, x_{J_k}, x_{J_{k+1}}, \cdots, x_{J_\nu}) \equiv 0$ だが $F_{J_k}(x) \not\equiv 0$ となる関数。

この展開定理の応用として次の２つの定理が証明できる。

<u>定理８</u>　*Docile* な斉次変換 $H(x)$ の添字が定理７のように $J_1 \cup \cdots \cup J_\nu = \{1, 2, \cdots, n\}$ と分解されているとする。この時 $H_{J_k}(0, \cdots, 0, x_{J_k}, 0, \cdots, 0)$ を x_{J_k} 空間での斉次変換とみての最大固有値を $\lambda_0(k)$ と書けば $H(x)$ の最大固有値 $\lambda_0(H)$ は次のように表わされる。

$$\lambda_0(H) = \max_{1 \leq k \leq \nu} \lambda_0(k)$$

<u>定理９</u>　*Docile* な斉次変換 $H(x)$ の添字が定理７のように $J_1 \cup \cdots \cup J_\mu \cup J_{\mu+1} \cup \cdots \cup J_\nu = \{1, 2, \cdots, n\}$ と分解されているとする。この時 $H(x)$ が正の固有ベクトルを持つための必要十分条件は、

$$\lambda_0(1)=\lambda_0(2)=\cdots=\lambda_0(\mu)>\max_{\mu+1\leqq k\leqq 2)}\lambda_0(k)$$

非斉次変換

これまでは斉次性つまり $T(\rho x)=\rho T(x)$ を仮定した。一般化の第一歩としては、この条件を次のように代えるのが自然であろう。

$$T(\rho x)=\varphi(\rho,x)\,T(x)$$

但し $\varphi(\rho,x)$ は正のスカラー値をとる関数。また $T(0)=0$。この時、当然ながら固有という概念は意味を失なう。しかし固有ベクトルないしは固有方向という概念は保たれる。

ここで $\varphi(\rho,x)$ の性質として重大な意味を持つ２つの場合が考えられる。すなわち

1) $\varphi(\rho,x)\leqq\rho \quad {}^\forall\rho>1$

2) $\varphi(\rho,x)\geqq\rho \quad {}^\forall\rho>1$

1)の場合は $T(x)$ を生産量 x を達成する投入量と見た時、生産規模の増大につれて生産の能率が良くなること、つまり収穫逓増を表わす。2)の場合は生産規模の増大につれて生産の能率が悪くなること、つまり収穫逓減を表わす。

本研究集会の後、次の事に気が着いた。1)の場合の固有ベ

クトル問題は、斉次変換の固有ベクトル問題に帰着できる。特に non-sectional という性質もつの場合にはうまく定義できて、正の固有ベクトルを唯一つ持つ十分条件を与えることができる。

参考文献

[1] Morishima, M. : Equilibrium, Stability and Growth. London (1964) (Appendix)

[2] Nikaido, H. : Balanced Growth in Multi-sectional Income Propagation under Autonomous Expenditure Schemes. Review of Economic Studies 31 (1964) 25-42

[3] Oshime, Y. : Nonlinear Perron-Frobenius Problem. Proc. Japan Acad. 58A (1982) 246-249

[4] Oshime, Y. : An Extension of Morishima's Nonlinear Perron-Frobenius Theorem. To appear in J. Math. Kyoto Univ.

[5] Gantmacher, F.R. : Theory of Matrices. New York (1959) (Chap. 13)